演習問題:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \mathrm{E} \exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{k_B T}}\right) \mathrm{dE}}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{k_B T}}\right) \mathrm{dE}} = \mathrm{k_B T}$$

を示せ。

(ヒント)
積分公式$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \int x e^{ax} dx = (x - \frac{1}{a}) \frac{1}{a} e^{ax}$
を使う。今の場合、a<0であることに注意する。

演習問題:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \frac{\int_0^\infty \mathrm{E}\exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{k_B T}}\right)\mathrm{dE}}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{k_B T}}\right)\mathrm{dE}} = \mathrm{k_B T}$$

を示せ。

(解答)

ここで、a<0ならば、x→∞のとき、exp(ax)→0かつx exp(ax)→0であるので、$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$, $\int xe^{ax}dx = (x - \frac{1}{a})\frac{1}{a}e^{ax}$のそれぞれの0<x<∞の定積分は、1/aおよび-1/a^2になる。

今、a=-1/k_BTなので、<E>=-1/a=k_BT

演習問題:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)} = \frac{\varepsilon}{\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right) - 1\right)}$$

を示せ。

(ヒント)
分子は、初項1、公比exp(-ε/k_BT)の無限等比級数の和である。
分母は、分子をZとすると、∂Z/∂(-1/k_BT)となる。

演習問題:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)} = \frac{\varepsilon}{\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right) - 1\right)}$$

を示せ。

(解答)

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right) = \frac{1}{\left(1 - \exp(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}})\right)}$$

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \frac{1}{\mathrm{Z}} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial\left(-\frac{1}{\mathrm{k_B T}}\right)} = \frac{1}{\mathrm{Z}} \frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right)\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{k_B T}}\right) - 1\right)}$$