

問題 9 雨滴粒径 D が次のような指数分布をもっているとします。

$$N(D) = N_0 e^{-\Lambda D}$$

このとき、直径のメジアン（中央値） D_m が $(\ln 2) / \Lambda$ となることを証明しましょう。なお、ガンマ関数は

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

で表され、 $\Gamma(1) = 1$ とします。

解答例 次のような関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} N_0 e^{-\Lambda D} dD = \int_0^{D_m} N_0 e^{-\Lambda D} dD$$

ここで $\Lambda D = x$ とおくと、 $dD = dx / \Lambda$ なので、

$$\text{左辺} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{N_0}{\Lambda} e^{-x} dx = \frac{N_0}{2\Lambda} \Gamma(1) = \frac{N_0}{2\Lambda}$$

右辺はそのまま積分して

$$\text{右辺} = -\frac{N_0}{\Lambda} [e^{-\Lambda D}]_0^{D_m} = -\frac{N_0}{\Lambda} (e^{-\Lambda D_m} - 1)$$

左辺=右辺から、 $D_m = (\ln 2) / \Lambda$ が得られる。